Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo 2007

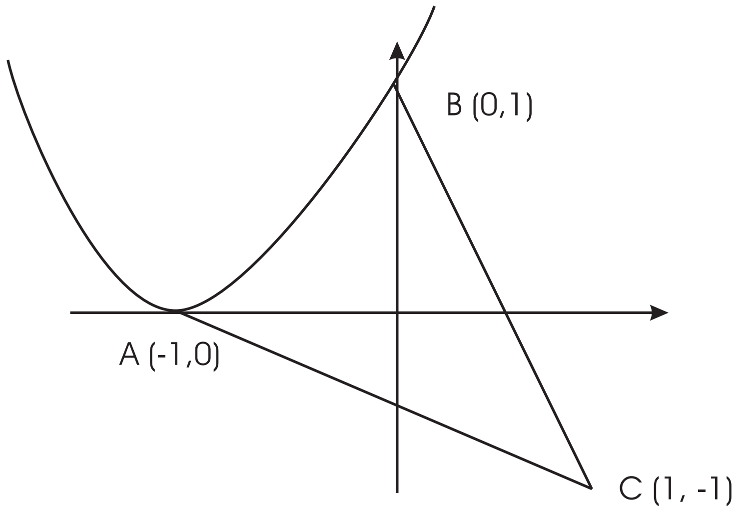
Nombre: ______________________________

Carnet: ________________ Sección: _____

MA-1112— Primer parcial Tipo A1—

1. Dados los puntos $A(-1,0),\ \ B(0,1)\ \ C1,-1,$ considere la figura plana limitada por: el arco de extremos $A,\ B$ de la parábola de ecuación $y=(x+1)^2,$ los segmentos $AC,\ BC.$

   Solución



   a) bosqueje la figura,

   b) exprese el área de la figura por medio de convenientes integrales,
   ecuación de la recta por $A,\ C:\ y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2};$
   ecuación de la recta por $B,\ C:\ y=2x+1;$
   Área $=\displaystyle\int_{-1}^{0}\left[(x+1)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]dx+\int_{0}^{1}\left[(-2x+1)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\right]dx=$

   c) $=\left[\frac{(x+1)^3}{3}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-x^2+x+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right]_{0}^{1}=\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(-1+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-0=\frac{4}{3}.$

2. Calcule las siguientes integrales

a)
$$\int (x+1)\sec^2\left(2x^2+4x\right)\tan^3\left(2x^2+4x\right)dx.$$

Solución

Sea I la integral que queremos calcular. Usamos la sustitución $u = 2x^2+4x$, $du = (4x+4)\,dx$, entonces

$$I = \frac{1}{4}\int \sec^2(u)\tan^3(u)\,du = \frac{\tan^4(u)}{4} + C,$$

donde la integral anterior fue resuelta usando la regla generalizada de la potencia, recordando que $\frac{d}{du}(\tan(u)) = \sec^2(u)$.

b)
$$\int \operatorname{sen}(z)\cos(z)\left(2\cos^2 z - 3\right)^{\frac{1}{3}} dz.$$

Solución

Sea I la integral que queremos calcular. Usamos la sustitución $u = \cos(z)$, $du = -\operatorname{sen}(z)dz$

$$I = -\int u\left(2u^2-3\right)^{\frac{1}{3}} du.$$

Ahora usamos la sustitución $t = 2u^2-3$, $dt = 4udu$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{3}}dt = -\frac{3}{16}t^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{3}{16}\left(2u^2-3\right)^{\frac{4}{3}} + C \\ &= -\frac{3}{16}\left(2\cos(z)^2-3\right)^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

3. Sea $F(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{sen} x-2}^{4x^2+1} t^4 dt$. Calcule $F'(0)$ usando explícitamente el Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

Solución

Como la función $f(t) = t^4$ es continua en toda la recta real, podemos utilizar el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, junto con la regla de la cadena y la propiedad aditiva sobre intervalos de la integral para calcular $F'(x)$:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \left(\int_{\operatorname{sen}(x)-2}^{4x^2+1} t^4 dt \right)' = \left(\int_{\operatorname{sen}(x)-2}^{0} t^4 dt + \int_{0}^{4x^2+1} t^4 dt \right)' \\
&= \left(-\int_{0}^{\operatorname{sen}(x)-2} t^4 dt + \int_{0}^{4x^2+1} t^4 dt \right)' \\
&= -\left(\operatorname{sen}(x) - 2\right)^4 \cos(x) + \left(4x^2+1\right)^4 8x.
\end{aligned}$$

Entonces

$$F'(0) = -\left(\operatorname{sen}(0) - 2\right)^4 \cos(0) + \left(4(0)^2+1\right)^4 8(0) = -2^4 = -16.$$

4. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en todo el conjunto de los números reales. Se conoce que

$$\int_a^b (f(x) + 3g(x))\, dx = A, \text{ y } \int_a^b (2f(x) + 5g(x))\, dx = B.$$

Halle el valor de las dos integrales: $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$, indicando cual o cuales propiedades de la integral definida se usan.

Solución

Sea $\int_a^b f(x)dx = H$, $\int_a^b g(x)dx = K$; por la propiedad de linealidad se tiene entonces:

$$A = \int_a^b (f(x) + 3g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + 3\int_a^b g(x)dx = H + 3K$$

$$B = \int_a^b (2f(x) + 5g(x))\, dx = 2\int_a^b f(x)dx + 5\int_a^b g(x)dx = 2H + 5K$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$H + 3K = A,$$

$$2H + 5K = B$$

se obtiene entonces

$$H = \int_a^b f(x)dx = 2A - B$$

$$K = \int_a^b g(x)dx = 3B - 5A.$$